CONCOURS DE RECRUTEMENT AU PROFESSORAT DE L'ENSEIGNEMENT DU SECOND DEGRE AGRICOLE **CAPESA**

SESSION 2009

Concours : EXTERNE
Section : **Mathématiques**

PREMIERE EPREUVE ECRITE D'ADMISSIBILITE

Première composition

(Coefficient 2,5 : - Durée : 5 heures)

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
L'usage des calculatrices de poche est autorisé, à condition qu'elles soient à fonctionnement autonome et qu'il ne soit pas fait usage d'imprimante.

Le sujet comporte neuf pages.
L'énoncé comprend cinq parties (pages 2 à 8) et deux annexes (page 9).

Ce problème a pour objet l'utilisation de la fonction arctangente afin de définir quelques lois de probabilités.

Dans la partie 1, nous étudions la fonction arctangente, nous intéressons à son équation fonctionnelle, et établissons des résultats qui pourront être réinvestis dans les parties 3 et 5.

Dans la partie 2, nous validons une méthode de calcul approché d'intégrales afin de pouvoir l'appliquer au calcul d'images de réels par la fonction arctangente.

Dans les parties 3 et 4, nous nous intéressons à deux lois de probabilité continues, dans la partie 5, à deux lois de probabilité discrètes, toutes ces lois faisant intervenir, de manière plus ou moins importante, la fonction arctangente.

Les parties 2 à 5 sont complètement indépendantes.

On note tan la fonction tangente.

On rappelle que la restriction de la fonction tan à $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ est une bijection de $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ dans $\mathbb{R}$ et que sa fonction réciproque est appelée fonction arctangente et notée arctan.

Partie 1 : généralités .

On suppose connues les propriétés usuelles de la fonction tan.

1. a. Démontrer que la fonction arctan est impaire.

   b. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \arctan(x)$.

   c. Démontrer que la fonction arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa fonction dérivée sur $\mathbb{R}$.

   d. Donner l'allure de la courbe représentative de la fonction arctan ainsi que les asymptotes à cette courbe et la tangente en son point d'abscisse 0.

2. Etudier et représenter graphiquement la fonction : $x \mapsto \arctan(\tan(x))$.

3. a. Démontrer que pour tout $x > 0$, $\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$.

   b. Donner une relation analogue pour tout $x < 0$.

   c. Application : les réels non nuls x et y étant donnés, on se propose de calculer :
   $$\arctan(x) + \arctan(y) .$$

   (i) Traiter le cas où $xy = 1$.

   (ii) On suppose que $xy > 1$ et que $x > 0$. Montrer que $\arctan(x) + \arctan(y) \in]\frac{\pi}{2}, \pi[$ puis en déduire que $\arctan(x) + \arctan(y) = \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) + \pi$.

   (iii) Traiter le cas où $xy > 1$ et $x < 0$.

   (iv) On suppose maintenant que $xy < 1$. Montrer que $\arctan(x) + \arctan(y) \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ puis conclure.

4. Soit E l'ensemble des fonctions réelles définies et dérivables sur $\mathbb{R}^+$ et vérifiant :

$$\begin{cases} \text{pour tout } x > 0, f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2} \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

a. Soit f un élément de E.

(i) Préciser $f(1)$.

(ii) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

b. Soit φ une fonction réelle dérivable sur $[0, 1]$ telle que $\varphi(0) = 0$ et $\varphi(1) = \frac{\pi}{4}$. Démontrer qu'on peut alors prolonger φ en une fonction $f \in E$.

c. Déterminer l'ensemble E.

d. Sur le graphique de l'annexe 1, on donne la droite d'équation $y = \frac{\pi}{2}$, la courbe d'équation $y = \frac{1}{x}$ $(x > 0)$ et la courbe représentative d'une fonction φ vérifiant les conditions du 4b. Indiquer une méthode permettant de construire, pour $x > 1$, le point d'abscisse x de la courbe représentative de f, prolongement de φ.

Partie 2 : méthode de Simpson. (Thomas Simpson (1710-1761), mathématicien britannique)

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n. Pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on note aussi P la fonction polynômiale associée à P et pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, $P^{(k)}$ désigne la dérivée k-ième de P.

1. Soient Φ et Ψ les deux applications définies par :

$$\text{Pour tout } P \text{ de } \mathbb{R}_5[X], \Phi(P) = \int_{-1}^{1} P(t)dt \text{ et } \Psi(P) = \frac{P(-1) + 4P(0) + P(1)}{3} + \frac{P^{(3)}(-1) - P^{(3)}(1)}{180}.$$

a. Démontrer que Φ et Ψ sont des formes linéaires sur $\mathbb{R}_5[X]$.

b. Démontrer que Φ et Ψ sont égales (on pourra calculer les images par Φ et Ψ des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}_5[X]$).

2. Soit P une fonction polynômiale de degré inférieur ou égal à 5. On considère deux réels a et b $(a < b)$ et on pose $c = \frac{a+b}{2}$.

a. A l'aide du changement de variable $x = \frac{1}{b-a}(2t - (a+b))$, démontrer que :

$$\int_a^b P(t)dt = \frac{P(a) + 4P(c) + P(b)}{6}(b-a) + \frac{P^{(3)}(a) - P^{(3)}(b)}{2880}(b-a)^4. \text{ (formule de Simpson)}$$

b. Que devient le résultat précédent si $\deg(P) \leq 3$?

Dans toute la suite de cette partie, f est une fonction définie sur $[a,b]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ et de classe C^4 sur $[a,b]$. On note $M = \sup\{|f^{(4)}(t)|, t \in [a,b]\}$

3. Soit l'application linéaire Δ de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par :

   Pour tout P de $\mathbb{R}_2[X]$, $\Delta(P) = (P(a), P(b), P(c))$.

   a. Donner la matrice de Δ relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}_2[X]$ et $\mathbb{R}^3$ et montrer qu'elle est inversible.

   b. En déduire qu'il existe un unique polynôme P_f de $\mathbb{R}_2[X]$ tel que :
   $$P_f(a) = f(a), P_f(b) = f(b), P_f(c) = f(c).$$

   c. On pose $L_a(X) = (X-b)(X-c), L_b(X) = (X-a)(X-c), L_c(X) = (X-a)(X-b)$
   Démontrer que la famille (L_a, L_b, L_c) forme une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

   d. Exprimer P_f dans cette base.

La méthode de Simpson consiste, dans un premier temps, à approcher $\int_a^b f(t)dt$ par $\int_a^b P_f(t)dt$, c'est à dire par $\dfrac{f(a)+4f(c)+f(b)}{6}(b-a)$.

4. Dans cette question, on évalue l'erreur commise.

   Soit F une primitive de f sur $[a,b]$. Soit g la fonction définie sur $[0, \dfrac{b-a}{2}]$ par :
   $$g(t) = F(c+t) - F(c-t) - \frac{t}{3}(f(c+t) + f(c-t) + 4f(c))$$

   a. Calculer, pour tout réel t de $[0, \dfrac{b-a}{2}]$, $g'(t), g''(t)$ et $g^{(3)}(t)$.

   b. Démontrer que : pour tout réel t de $[0, \dfrac{b-a}{2}]$, $|g^{(3)}(t)| \leq \dfrac{2}{3}Mt^2$.

   c. En déduire que : pour tout réel t de $[0, \dfrac{b-a}{2}]$, $|g''(t)| \leq \dfrac{2}{9}Mt^3$ puis que :

   pour tout réel t de $[0, \dfrac{b-a}{2}]$, $|g(t)| \leq \dfrac{1}{90}Mt^5$

   d. En déduire que $\left| \int_a^b f(t)dt - \dfrac{f(a)+4f(c)+f(b)}{6}(b-a) \right| \leq \dfrac{M(b-a)^5}{2880}$

5. Dans un second temps, on effectue une subdivision régulière de $[a,b]$ de la forme $[x_0, x_1, ..., x_n]$ (où $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \in \{0,1...,n\}$ $x_k = a + k\dfrac{(b-a)}{n}$), et on approche $\int_a^b f(t)dt$ par

   $$S_n = \frac{b-a}{6n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(f(x_k) + 4f\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right) + f(x_{k+1})\right)$$

Démontrer que $\left|\int_a^b f(t)dt - S_n\right| \leq \frac{M(b-a)^5}{2880n^4}$

6. Démontrer que les inégalités des questions 4.d et 5. sont des égalités pour les fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à 4.

7. On suppose que la fonction f est déjà définie et que les réels a et b sont fixés. Écrire un algorithme permettant de calculer S_n avec un minimum d'opérations.

8. On se propose maintenant d'utiliser la méthode de Simpson afin de déterminer des valeurs approchées à 10^{-5} près de $\arctan(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

a. Justifier qu'il suffit de s'intéresser au cas où $x \in [0,1]$.

b. En considérant que pour tout réel x dans $[0,1]$, $\arctan(x) = \int_0^x f(t)dt$, où f est une fonction à préciser, démontrer que :

$$\text{pour tout réel } t \text{ de } \mathbb{R},\ f^{(4)}(t) = \frac{24(5t^4 - 10t^2 + 1)}{(t^2+1)^5}$$

c. En déduire que pour tout réel x de $[0,1]$, $|\arctan(x) - S_n(x)| \leq \frac{1}{120n^4}$, où $S_n(x)$ est la somme définie dans la question 5 en prenant $a = 0$ et $b = x$.

d. En déduire un entier n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, $S_n(x)$ soit une valeur approchée à 10^{-5} près de $\arctan(x)$.

Partie 3 : une première densité.

Dans cette partie, on pose pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{x^2+1} + \frac{2}{1+4x^2}\right)$

1. Etudier puis représenter graphiquement f.

2. Démontrer que f est une densité de probabilité.

3. Soit X une variable aléatoire réelle de densité f. Admet-elle une espérance mathématique ?

4. Soit F_X la fonction de répartition de X.

   a. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F_X(x) = \frac{1}{2\pi}(\arctan(x) + \arctan(2x) + \pi)$.

   b. En utilisant la question 3)c) de la partie 1, donner, selon les valeurs de $x \in \mathbb{R}$, une autre expression de $F_X(x)$ (on distinguera différents cas selon le signe de x et la position de $2x^2$ par rapport à 1).

c. Exprimer

· pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F_X(-x)$ en fonction de $F_X(x)$

· pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ $F_X\left(\frac{1}{x}\right)$ en fonction de $F_X\left(\frac{x}{2}\right)$ (on distinguera les cas : $x > 0$ et $x < 0$).

5. Pour tout entier $n \geq 2$, on définit un réel x_n par la condition $P(X \leq x_n) = \frac{1}{n}$.

a. Justifier que la suite (x_n) est bien définie.

b. Préciser x_2 et calculer x_3.

c. Démontrer que la suite (x_n) est décroissante, puis que $\lim(x_n) = -\infty$.

d. Démontrer que la suite (x_n) est équivalente à $-\frac{3n}{4\pi}$.

e. En déduire des équivalents de y_n et z_n définis par :

· Pour tout $n \in \mathbb{N}, n \geq 2, P(X \leq y_n) = \frac{n-1}{n}$

· Pour tout $n \in \mathbb{N}, n \geq 3, P(X \leq z_n) = \frac{n-2}{2n}$

6. Grâce à la question 8. de la partie précédente, il est possible de construire une table de valeurs approchées à 10^{-4} près de $F_X(x)$ sur le modèle de la table classique de la loi normale centrée réduite (voir annexe 2) . Utiliser cette table afin d'évaluer :

a. $P(X \leq \frac{3}{4}), P(X > \frac{2}{5}), P(X > \frac{5}{4}), P(X < \frac{1}{3})$ (pour ce dernier calcul, on pourra effectuer une interpolation linéaire)

b. x tel que $P(X \leq x) = 0,908$.

Partie 4 : une deuxième densité.

Dans cette partie, on appelle g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} \forall x \geq 0, g(x) = \dfrac{\arctan x}{(1+x^2)^2} \\ \forall x < 0, g(x) = 0 \end{cases}$

1. a. Démontrer que $\int_0^{+\infty} g(t)dt$ converge. On pose alors $I = \int_0^{+\infty} g(t)dt$.

b. Démontrer que $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} u\cos^2(u)du$.

c. En déduire que $I = \frac{\pi^2 - 4}{16}$.

d. Déterminer la constante réelle k telle que kg soit une densité de probabilité.

2. Soit Y une variable aléatoire réelle de densité kg.

a. Démontrer que Y admet une espérance mathématique, puis, à l'aide du changement de variable $x = \frac{1}{t}$, démontrer que :

$$E(Y) = \frac{k\pi}{4} \int_0^{+\infty} \frac{x}{(1+x^2)^2} dx.$$

Calculer enfin $E(Y)$.

b. Démontrer que Y^2 admet une espérance mathématique, la calculer, puis en déduire la variance de Y.

Partie 5 : des lois discrètes.

Une loi sans espérance...

1. Soit la suite (u_n) définie par :

$$\text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}^*, u_n = \frac{4}{\pi} arc\tan\left(\frac{1}{2n^2}\right).$$

a. Démontrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n} arc\tan\left(\frac{1}{2k^2}\right) = \arctan\left(\frac{n}{n+1}\right)$.

b. Étant donnée une variable aléatoire réelle U à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, est-il possible de définir une loi de probabilité en posant :

$$\text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}^*, P(U = n) = u_n \ ?$$

2.

a. Donner un équivalent de u_n au voisinage de $+\infty$.

b. Montrer que U n'admet pas d'espérance mathématique.

... une autre avec espérance et variance.

3. Soit la fonction h définie sur $[0,1[$ par $\begin{cases} h(x) = \dfrac{\arcsin(\sqrt{x})}{\sqrt{x-x^2}} \text{ si } x \neq 0 \\ h(0) = 1 \end{cases}$

a. Démontrer que h est de classe C^1 sur $[0,1[$ et préciser $h'(0)$.

b. Démontrer que h est solution de l'équation différentielle (E) : $2y'(x-x^2) + y(1-2x) = 1$ sur $[0,1[$.

c. En déduire que pour tout x de$[0,1[, h(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n!)^2 2^{2n}}{(2n+1)!} x^n$

d. Pour tout $t > 0$, on pose $g(t) = h\left(\dfrac{t^2}{1+t^2}\right)$

(i) Démontrer que pour tout $t > 0, g(t) = \dfrac{1+t^2}{t}\arctan(t)$.

(ii) On pose pour tout $t > 0, g_n(t) = \dfrac{(n!)^2 2^{2n}}{(2n+1)!}\left(\dfrac{t^2}{1+t^2}\right)^n$

Démontrer que la série de terme général $g_n'(t)$ converge normalement sur tout segment de $]0, +\infty[$; en déduire que pour tout $t > 0$, $g'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} g_n'(t)$.

(iii) Démontrer de même que pour tout $t > 0, g''(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\dfrac{(n!)^2 2^{2n+1}}{(2n+1)!} \times \dfrac{(2n-1)t^{2n-2} - 3t^{2n}}{(1+t^2)^{n+2}}$

4. Soit la suite (w_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, w_n = \dfrac{2}{\pi}\dfrac{(n!)^2 2^n}{(2n+1)!}$

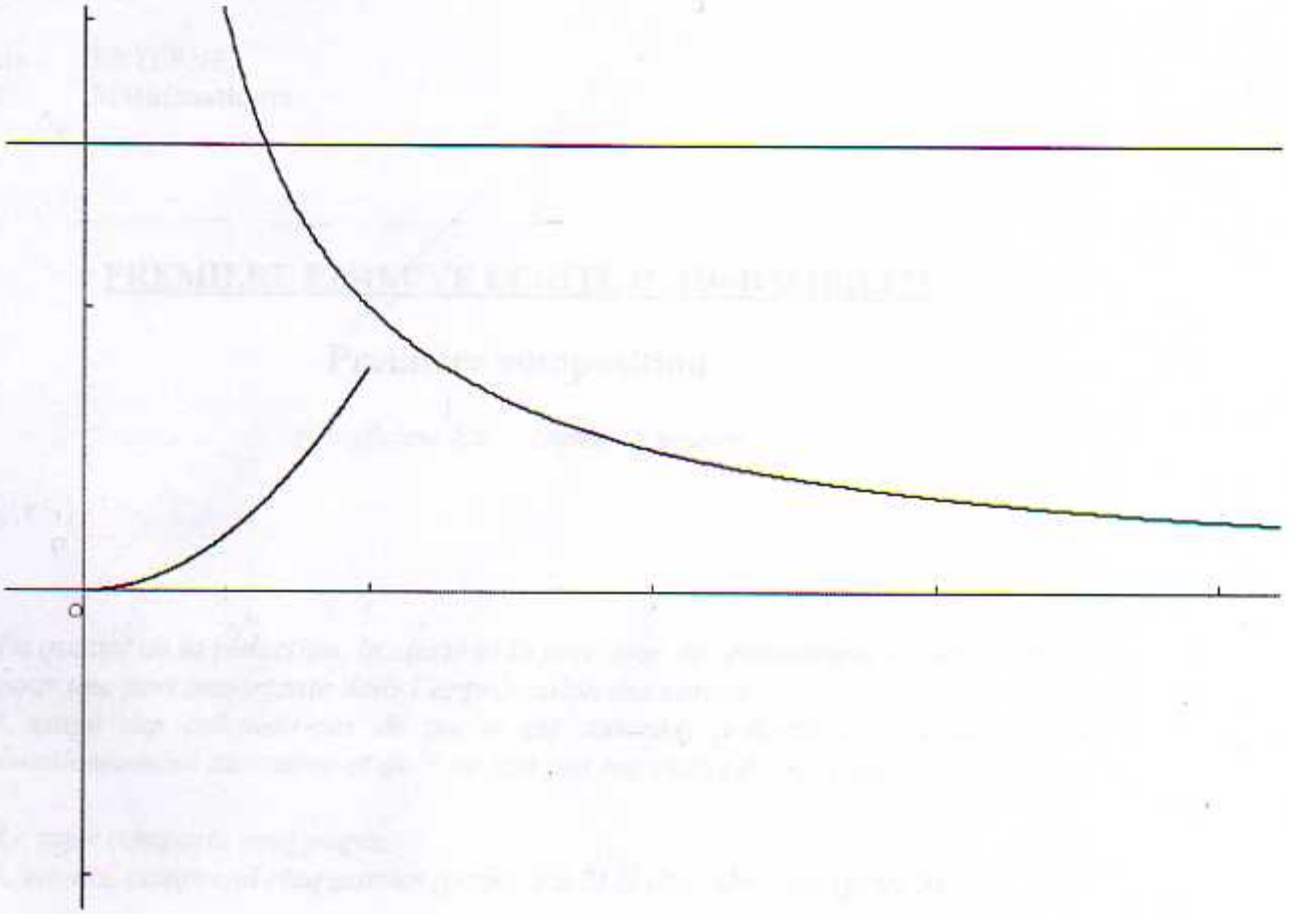
a. Étant donnée une variable aléatoire réelle T à valeurs dans $\mathbb{N}$, est-il possible de définir une loi de probabilité en posant :

pour tout n de $\mathbb{N}, P(T = n) = w_n$?

b. Démontrer que $E(T) = \dfrac{2}{\pi}$.

c. Calculer $E(T(T-2))$ puis en déduire que T admet une variance et la calculer.

Annexe 1 (question 4.d. de la partie 1):



Annexe 2 (question 6 de la partie 3) :

	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5048	0.5095	0.5143	0.5191	0.5238	0.5285	0.5333	0.5380	0.5426
0.1	0.5473	0.5519	0.5565	0.5611	0.5656	0.5701	0.5745	0.5790	0.5833	0.5877
0.2	0.5920	0.5962	0.6004	0.6046	0.6087	0.6128	0.6168	0.6208	0.6247	0.6286
0.3	0.6324	0.6362	0.6399	0.6436	0.6472	0.6508	0.6543	0.6578	0.6612	0.6646
0.4	0.6679	0.6712	0.6745	0.6777	0.6808	0.6839	0.6870	0.6900	0.6930	0.6959
0.5	0.6988	0.7016	0.7044	0.7072	0.7099	0.7126	0.7152	0.7179	0.7204	0.7229
0.6	0.7254	0.7279	0.7303	0.7327	0.7351	0.7374	0.7397	0.7419	0.7441	0.7463
0.7	0.7485	0.7506	0.7527	0.7548	0.7568	0.7588	0.7608	0.7628	0.7647	0.7666
0.8	0.7685	0.7703	0.7722	0.7740	0.7757	0.7775	0.7792	0.7809	0.7826	0.7843
0.9	0.7859	0.7875	0.7891	0.7907	0.7923	0.7938	0.7953	0.7968	0.7983	0.7998
1.0	0.8012	0.8026	0.8040	0.8054	0.8068	0.8081	0.8095	0.8108	0.8121	0.8134